Table des matières

1	Calculs	1
2	Factorisation et simplification d'écriture	3
3	Intervalle	3
4	Equations et inéquations	4
5	Etude de fonction	4
6	Intégration	6
7	Etude de suites	8

1 Calculs

Pour les exercices 1 à 10, donner les résultats sous forme de fraction irréductible ou sous la forme la plus factorisée possible.

Exercice 1. Fractions

$$1. \left(\frac{7}{5} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{7}{5} - 1 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{6}.$$

$$2. \frac{7}{3} \times \left(2 + \frac{1}{7}\right) = 5.$$

$$3. \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = -\frac{6}{5}.$$

$$4. \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{5}{3}} = -\frac{11}{29}.$$

$$5. \frac{1 + \frac{3}{5}}{4 - \frac{1}{2}} = \frac{16}{35}.$$

$$6. \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{5}{4}} = -\frac{6}{17}.$$

$$7. \frac{\frac{3}{16} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{12} + \frac{7}{20}} = \frac{15}{184}.$$

Exercice 2. Fractions avec une inconnue

$$1. \text{ Pour } x \neq -2, 3 + \frac{5}{2+x} = \frac{11+3x}{2+x}.$$

$$2. \text{ Pour } x \neq 2, 5 + \frac{x+1}{x-2} = 3\frac{2x-3}{x-2}.$$

$$3. \text{ Pour } x \neq 3/2 \text{ et } x \neq -5/4, \frac{-2x+3}{2x-3} + \frac{3x+7}{4x+5} = \frac{2-x}{4x+5} \text{ en remarquant que } \frac{-2x+3}{2x-3} = -1.$$

$$4. \text{ Pour } x \neq -1/2 \text{ et } x \neq 2/3, \frac{x-2}{4x+2} - \frac{4x-1}{3x-2} + \frac{19x^2}{(4x+2)(3x-2)} = 3\frac{(x-1)^2}{(2x+1)(3x-2)}.$$

Exercice 3. Racine carrée

$$1. 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54} = 0.$$

$$2. \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2} - 3 \text{ car } 1 - \sqrt{2} < 0.$$

$$3. \frac{7}{2 - \sqrt{7}} = -\frac{7}{3}(2 + \sqrt{7}).$$

$$4. \left(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \right)^2 = 24.$$

Exercice 4. Puissances

$$1. \frac{10^9 \times 6^3}{25^4 \times 3 \times 2^{11}} = 90.$$

$$2. \frac{1}{10^{118}} - \frac{1}{10^{119}} = \frac{9}{10^{119}}.$$

$$3. 5^{108} \times 2^{106} \times 11 \times \frac{1}{10^{107}} = \frac{55}{2}.$$

Exercice 5. Puissances avec une inconnue

$$1. \frac{(x\sqrt{x})^5}{(x^3 \times x)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ avec } x > 0.$$

$$2. (-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n+2} = (-1)^{n+1} \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 6. Exponentielle

$$1. \frac{e^5 \times e^{-2}}{e^4} = \frac{1}{e}.$$

$$2. \frac{e^{-2} \times e^7}{e^3 \times e^{-4}} = e^6.$$

Exercice 7. Exponentielle avec une inconnue

$$1. \frac{e^{-2x} \times e^{4x}}{e^{5x} \times e^{-6x}} = e^{3x} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

$$2. \frac{e^{x-3} \times e^{4x}}{e^{1-3x}} = e^{8x-4} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8. Propriétés du logarithme et de l'exponentielle

$$1. \frac{\ln(16) + \ln(64)}{10 \ln(2)} = 1.$$

$$2. \ln \left(\frac{e^5 \times 12}{e^{-6}} \times e^2 \right) = 13 + \ln(12).$$

Exercice 9. Coefficients binomiaux

$$1. \binom{8}{4} = 70. \text{ N'oubliez pas d'utiliser la décomposition en facteurs premiers.}$$

$$2. \binom{7}{3} = 35.$$

$$3. \binom{12}{9} = 220.$$

Exercice 10. Factorielles

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$1. \frac{(n+1)! - n!}{n} = n!.$$

$$2. \frac{(n+3)!}{(n+1)!} = (n+2)(n+3).$$

$$3. \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Exercice 11. Suite définie par une factorielle

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, b réels non nuls, on pose :

$$u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}.$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{(n+1)b^2}.$$

2 Factorisation et simplification d'écriture

Exercice 12. Factorisation

Pour $x \in \mathbb{R}$, factoriser les expressions suivantes.

- $(3x + 5)(x - 1) + (x - 1) = 3(x - 1)(x + 2)$.
- $(5x - 1)(2x + 3) - 5x + 1 = 2(5x - 1)(x + 1)$.
- $(7x - 2)(x - 9) + 14x - 4 = (7x - 2)(x - 7)$.
- $(x + 4)^2 + (x - 4)(x + 4) + 2x + 8 = 2(x + 4)(x + 1)$.
- $(2x + 6)(x - 5) + 3x + 9 = (x + 3)(2x - 7)$.
- $x^2 - 4x + 4 + (x + 3)(x - 2) = (x - 2)(2x + 1)$.
- $(3x - 2)(x + 5) + 9x^2 - 4 = (3x - 2)(4x + 7)$.
- $\frac{25}{4}x^2 - \frac{169}{144} = \left(\frac{5}{2}x - \frac{13}{12}\right)\left(\frac{5}{2}x + \frac{13}{12}\right)$.
- $\frac{81}{16}x^2 - \frac{33}{2}x + \frac{121}{9} = \left(\frac{9}{4}x - \frac{11}{3}\right)^2$.
- $(3x - 1)(4x + x^2) - 3(3x - 1) = (3x - 1)(x + 2 + \sqrt{7}(x + 2 - \sqrt{7}))$.
- $x^2 - 9 + 3(x - 3) = (x - 3)(x + 6)$.
- $x^3 + x^2 + x - 3 = (x - 1)(x^2 + 2x + 3)$, ce dernier polynôme du second degré n'a pas de racine réelle.

Exercice 13. Simplification d'exponentielles

Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$,

- $\frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{2e^{-x} \times e^x}{(1 + e^{-x}) \times e^x} = \frac{2}{e^x + 1}$.
- $\frac{2}{1 + e^x} = \frac{2 \times e^{-x}}{(1 + e^x) \times e^{-x}} = \frac{2 + 2 \times e^{-x} - 2}{1 + e^{-x}} = 2 - \frac{2}{1 + e^{-x}}$.
- $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x - e^{-x}) \times e^{-x}}{(e^x + e^{-x}) \times e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.
- $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{(e^{2x} - 1) \times e^{-2x}}{(e^{2x} + 1) \times e^{-2x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

3 Intervalle

Exercice 14. Encadrement

Soient x et y deux réels tels que

$$-2 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad -5 \leq y \leq 1,$$

donner un encadrement des quantités suivantes :

- $x + 3$.
- $y + 6$.
- $(x + 3)(y + 6)$.
- $(x + 3) - (y + 6)$.
- $\frac{x + 3}{y + 6}$.
- $2 - x^2$.

On obtient :

- $1 \leq x + 3 \leq 6$.
- $1 \leq y + 6 \leq 7$.
- $1 \leq (x + 3)(y + 6) \leq 42$.
- $-6 \leq (x + 3) - (y + 6) \leq 5$ car $-7 \leq -(y + 6) \leq -1$.
- $\frac{1}{7} \leq \frac{x + 3}{y + 6} \leq 6$.
- $-7 \leq 2 - x^2 \leq 2$ car $0 \leq x^2 \leq 9$.

Exercice 15. Intervalle

Dans chacun des cas, déterminer la valeur du nombre réel a et du nombre réel strictement positif r de telle sorte que l'intervalle s'écrive sous la forme $[a - r; a + r]$, puis écrire à l'aide de valeurs absolues ces intervalles.

Pour chacune de ces résolutions, représentez l'intervalle considéré sur un axe, cela vous aidera pour la compréhension de ce qui suit.

1. $I = [2; 4]$ Le centre de l'intervalle I est $a = \frac{4+2}{2} = 3$. De plus $4 - 3 = 1$ donc $r = 1$. Donc

$$x \in [2; 4] \quad \text{si et seulement si} \quad |x - 3| \leq 1.$$

2. $J = [4; 10]$ Le centre de l'intervalle J est $a = \frac{10+4}{2} = 7$. De plus $10 - 7 = 3$ donc $r = 3$. Donc

$$x \in [4; 10] \quad \text{si et seulement si} \quad |x - 7| \leq 3.$$

3. $K = [-2; 8]$ Le centre de l'intervalle K est $a = \frac{8+(-2)}{2} = 3$. De plus $8 - 3 = 5$ donc $r = 5$. Donc

$$x \in [-2; 8] \quad \text{si et seulement si} \quad |x - 3| \leq 5.$$

4. $L = [-12; -3]$ Le centre de l'intervalle L est $a = \frac{-3+(-12)}{2} = -15/2$. De plus $-3 - (-15/2) = 9/2$ donc $r = 9/2$.
Donc

$$x \in [-12; -3] \quad \text{si et seulement si} \quad |2x + 15| \leq 9.$$

4 Equations et inéquations

Exercice 16. Résolution d'équations

Résoudre les équations suivantes

1. $3(x - 3) + 5 = 5 \left(\frac{x}{2} - \frac{4}{3} \right)$.

$$\text{On obtient : } x = -\frac{16}{3}.$$

2. $\frac{6x - 1}{4x - 1} = \frac{3x + 1}{2x - 5}$.

$$\text{On obtient : } x = \frac{2}{11} \text{ en faisant attention à } x \neq \frac{1}{4} \text{ et } x \neq \frac{5}{2}.$$

3. $\sqrt{x^2 + 9} = 5$.

$$\text{On obtient : } x = 4 \text{ ou } x = -4.$$

Exercice 17. Résolution d'inéquations

Résoudre les inéquations suivantes

1. $\frac{x+3}{x-1} < \frac{x-4}{x+2}$.

On distingue suivant $x < -2$, $-2 < x < 1$ et $x > 1$. Les solutions sont

$$]-\infty, -2[\cup \left] -\frac{1}{5}, 1 \right[.$$

2. $\sqrt{4-x} \leq x-7$.

Pour l'existence de la racine carrée, on doit avoir $x \leq 4$ et comme la racine carrée est positive, alors $x - 7 \geq 0$.
Ce qui est incompatible. L'inéquation a aucune solution.

5 Etude de fonction

Exercice 18. Composition de fonctions

1. Pour tout réel x , on pose :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x - 1.$$

Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.

$$g \circ f(x) = 2x^2 - 1 \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = 4x^2 - 4x + 1.$$

2. Pour tout réel x , on pose :

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(x).$$

Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.

$$g \circ f(x) = \sin(1 - x^2) \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = \cos^2(x).$$

Exercice 19. Ensembles de définition

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x \ln(x)$.

On a facilement $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

2. $f(x) = \sqrt{\frac{9 - x^2}{e^x - 1}}$.

On a $D_f =]-\infty, -3] \cup]0, 3]$ (le numérateur et le dénominateur doivent avoir le même signe).

Exercice 20. Dérivées

Donner l'ensemble de définition et de dérivation de ces fonctions. Calculer également leur dérivée.

1. $f(x) = x \ln(x)$.

2. $f(x) = \ln(\ln(x))$.

3. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

4. $f(x) = e^{x^2}$.

5. $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

6. $f(x) = (x^2 + x + 1) e^{-x}$.

1. *Domaine de définition et de dérivabilité* : $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

2. *Domaine de définition et de dérivabilité* : $]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}.$$

3. *Domaine de définition et de dérivabilité* : $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

4. *Domaine de définition et de dérivabilité* : $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2xe^{x^2}.$$

5. *Domaine de définition et de dérivabilité* : $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

6. *Domaine de définition et de dérivabilité* : $\mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{-x} x(1 - x).$$

Exercice 21. Limites

Etudier les limites demandées.

1. $f(x) = 3x - 2 - 4 \ln(x) = x \left(3 - \frac{2}{x} - \frac{4 \ln(x)}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

2. $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{2+1/x}{1+1/x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(2)$

3. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} g'(0) = 1$ avec $g(x) = \ln(1+x)$ (taux d'accroissement en 0).

4. $f(x) = \frac{\ln(1+\sin(x))}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} g'(0) = 1$ avec $g(x) = \ln(1+\sin(x))$ (taux d'accroissement en 0).

5. $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)} = \frac{e^x}{x} \frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées.

Exercice 22. Inégalité

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x.$$

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

On dérive deux fois. f'' est positive, donc f' est croissante et comme $f'(0) = 0$ alors f' est positive. On en conclut que f est croissante et comme $f(0) = 0$ alors f est positive, ce qui nous permet de conclure.

Exercice 23. Dérivées

Dans chaque cas, donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation et la fonction dérivée.

1. $f(x) = \cos(3x^2 + 2)$.
2. $f(x) = 3 \tan(x) - \cos(x) \sin(x)$.
3. $f(x) = \sqrt{x} \sin(x)$.
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 21}$.

1. *Domaine de définition et de dérivabilité* : $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -6x \sin(3x^2 + 2).$$

2. *Domaine de définition et de dérivabilité* : $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2(x)} - \cos(2x).$$

3. *Domaine de définition* : $\mathbb{R}_+$ et *domaine de dérivabilité* : $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos(x).$$

4. *Domaine de définition* : $] - \infty, 3] \cup [7, +\infty[$ et *domaine de dérivabilité* : $] - \infty, 3[\cup]7, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{x - 5}{\sqrt{(x - 3)(x - 7)}}.$$

Exercice 24. Inégalité

Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x$.

On étudie la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x) = x - \sin(x).$$

f' est positive. On en conclut que f est croissante et comme $f(0) = 0$ alors f est positive, ce qui nous permet de conclure.

On étudie la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$g(x) = \sin(x) - \frac{2}{\pi} x.$$

g' est strictement décroissante et change de signe en α (d'après le théorème de la bijection monotone). On en conclut que g est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$, comme $g(0) = 0$ et $g(\frac{\pi}{2}) = 0$ alors g est positive, ce qui nous permet de conclure.

6 Intégration

Exercice 25. Primitives classiques

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 (x^3 + 2x^2 + x + 1) dx = \frac{29}{12}$.

$$2. \int_0^1 (2x-2)(x^2-2x+1)^4 dx = -\frac{1}{5} \text{ (il ne faut pas développer).}$$

$$3. \int_0^1 \frac{2x+1}{x-4} dx = \int_0^1 2 + \frac{9}{x-4} dx = 2 + 9 \ln\left(\frac{3}{4}\right).$$

$$4. \int_1^2 (x^e - e^x) dx = \frac{2^{e+1} - 1}{e+1} - e^2 + e.$$

$$5. \int_0^1 \frac{8x+4}{x^2+x+1} dx = [4 \ln(x^2+x+1)]_0^1 = 4 \ln(3).$$

$$6. \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1 = \frac{1-e^{-1}}{2}.$$

$$7. \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^x+2} dx = [\ln(e^x+2)]_0^{\ln(2)} = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

$$8. \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = [2\sqrt{1-x^2}]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

Exercice 26. Intégrer dans une inégalité

1. Soit $x > 0$, montrer que $\forall t \in [0, x]$,

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1.$$

Comme la fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ alors

$$0 \leq t \leq x \Leftrightarrow 1 \leq 1+t \leq 1+x \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1.$$

2. En déduire que pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x.$$

On intègre suivant le variable t sur l'intervalle $[0, x]$ pour obtenir à l'aide de la croissance de l'intégrale

$$\int_0^x \frac{1}{1+x} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x 1 dt \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x.$$

Exercice 27. Simplifier pour trouver une limite

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1]$,

$$0 \leq x^n e^x \leq x^n e.$$

Comme $x \in [0, 1]$, alors $x^n \geq 0$ et $0 < e^x \leq e^1$ (par croissance de l'exponentielle), donc

$$0 \leq x^n e^x \leq x^n e.$$

2. En déduire la limite de la suite $\left(\int_0^1 x^n e^x dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

On intègre suivant le variable x sur l'intervalle $[0, 1]$ pour obtenir à l'aide de la croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 x^n e dx.$$

$$\text{Or } \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \text{ ainsi}$$

$$0 \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq \frac{e}{n+1}.$$

Par encadrement, $\left(\int_0^1 x^n e^x dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

7 Etude de suites

Exercice 28. Limites

Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes.

- $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$
- $b_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{1 + (2/3)^n}{3 + 2(2/3)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}.$
- $c_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ car $\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

Exercice 29. Suite arithmétique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

- Ecrire u_n en fonction de u_0 , r et n puis discuter de la convergence de (u_n) .

On a les limites suivantes

$$u_n = u_0 + rn \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty, & \text{si } r > 0, \\ u_0, & \text{si } r = 0, \\ -\infty, & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

- Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On prouve facilement cette relation par récurrence sur n .

- En déduire

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

On a alors

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + nr) = (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \dots + n) = (n+1) \left(u_0 + \frac{rn}{2}\right).$$

Exercice 30. Suite géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

- Ecrire u_n en fonction de u_0 , q et n puis discuter de la convergence de (u_n) .

On a les limites suivantes

$$u_n = u_0 q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} \pm\infty, & \text{si } q > 1 \text{ et suivant le signe de } u_0, \\ u_0, & \text{si } q = 1, \\ 0, & \text{si } q \in]-1, 1[, \\ \text{pas de limite finie ou infinie,} & \text{si } q = -1, \\ \text{pas de limite finie ou infinie,} & \text{si } q < -1. \end{cases}$$

- On pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Si $q \neq 1$, simplifier $(1 - q)S_n$.

$$(1 - q)S_n = (1 - q)(u_0 + u_1 + \dots + u_n) = u_0(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = u_0(1 - q^{n+1}).$$

- En déduire une expression de S_n en fonction de u_0 , q et n et discuter de la convergence de la suite (S_n) .

On en déduit

$$S_n = \begin{cases} u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & \text{si } q \neq 1, \\ u_0(n+1), & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

On distingue les limites de (S_n) suivant les valeurs de q et de u_0 .

- Si $q \geq 1$, (S_n) admet une limite infinie,
- si $q \in]-1, 1[$, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{1 - q}$,
- si $q \leq -1$, (S_n) n'a pas de limite finie ou infinie.

Exercice 31. Etude de suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 1}.$$

1. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2.$$

Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " $1 \leq u_n \leq 2$ ".

Initialisation : Comme $u_0 = 1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Il faut éviter d'encadrer $5u_n$ puis $2u_n + 1$, l'encadrement n'aboutira pas ainsi. On a

$$u_{n+1} = \frac{5}{2 + 1/u_n}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a $1 \leq u_n \leq 2$, donc

$$\frac{5}{2} \leq 2 + \frac{1}{u_n} \leq 3.$$

Ainsi

$$\frac{5}{3} \leq \frac{5}{2 + 1/u_n} \leq 2.$$

Comme $\frac{5}{3} > 1$, on en conclut que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

2. Montrer que (u_n) est croissante puis qu'elle converge et déterminer sa limite.

D'après la question précédente, on a $2u_n + 1 \leq 5$, donc

$$u_{n+1} = u_n \frac{5}{2u_n + 1} \geq u_n.$$

Donc (u_n) est croissante et majorée par 2, donc d'après le théorème de la limite monotone (u_n) converge vers un réel l compris entre 1 et 2.

En passant à la limite dans la relation de récurrence, on a

$$l = \frac{5l}{2l + 1} \Leftrightarrow 2l^2 + l = 5l \Leftrightarrow l^2 = 2l \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 2.$$

Or $l \in [1, 2]$, donc $l = 2$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = 1 - \frac{2}{u_n}.$$

Calculer v_0 et v_1 .

$$\text{On a } v_0 = -1 \text{ et } v_1 = -\frac{1}{5}.$$

4. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

$$\text{On obtient } v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n.$$

5. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

$$\text{Donc } v_n = -\frac{1}{5^n}, \text{ ainsi } u_n = \frac{2}{1 + \frac{1}{5^n}}.$$

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer en fonction de n

$$\frac{2}{u_0} + \frac{2}{u_1} + \dots + \frac{2}{u_n}.$$

$$\text{On a } \frac{2}{u_0} + \frac{2}{u_1} + \dots + \frac{2}{u_n} = (n+1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = (n+1) + \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right).$$

Exercice 32. Récurrence

Montrer par récurrence que

$$-1 + 2 - 3 + 4 - \dots + (-1)^n n = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}.$$

Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " $-1+2-3+4-\dots+(-1)^n n = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$ ".

Initialisation : Comme $\frac{(-1)^1(2 \times 1 + 1) - 1}{4} = -1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel non nul n fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a $-1+2-3+4-\dots+(-1)^n n = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$, donc

$$-1+2-3+4-\dots+(-1)^n n + (-1)^{n+1}(n+1) = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1} \frac{4n+4}{4} = \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1)+1)-1}{4}.$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 33. Série harmonique

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que

$$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}.$$

On a $u_{2n} - u_n = \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{n+1}$, or si $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ alors $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, ainsi

$$u_{2n} - u_n \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. Si (u_n) converge, que dire de (u_{2n}) ? En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Si (u_n) converge vers une limite finie l , alors la sous-suite de rang pair (u_{2n}) converge également vers la même limite l .

Raisonnons par l'absurde, supposons que (u_n) converge vers une limite finie l . Donc (u_{2n}) converge également vers la même limite l , or d'après la question précédente,

$$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}.$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient une contradiction $0 \geq \frac{1}{2}$. Ainsi (u_n) est une suite croissante ne convergeant pas vers une limite finie, donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) diverge vers $+\infty$.